פתרון הבחינה

במתמטיקה

קיץ תשע"ט, 2019, שאלון: 35482

מוגש ע"י צוות המורים של "יואל גבע"

y05

<u>סדרות</u>

1. a_n היא סדרה חשבונית שהאיבר הראשון שלה הוא a_1 וההפרש שלה הוא 4 .

b_n היא סדרה המוגדרת כך: $b_n = a_n + 8n$.

א. הוכח כי b_n היא סדרה חשבונית ומצא את ההפרש שלה.

c_n היא סדרה המוגדרת כך: $c_n = a_n + b_n$.

ב. הוכח כי c_n היא סדרה חשבונית.

נתון: $a_1 = \frac{1}{2}$.

ג. (1) מצא את c_1 .

(2) מצא את סכום 20 האיברים הראשונים בסדרה c_n .

<u>פתרון:</u>

א. בסדרת a_n נתון: $a_1 = a_1$, $d=4$

בסדרת b_n נתון: $b_n = a_n + 8n$

נוכיח כי ההפרש $b_{n+1} - b_n$ קבוע:

$$b_{n+1} = a_{n+1} + 8(n+1) = a_{n+1} + 8n + 8$$

לכן:

$$b_{n+1} - b_n = a_{n+1} + 8n + 8 - a_n - 8n$$

$$b_{n+1} - b_n = a_{n+1} - a_n + 8$$

ההפרש $a_{n+1} - a_n$ שווה ל-4 ולכן:

$b_{n+1}-b_n=4+8=12$

ההפרש קבוע $d=12$ ולכן סדרת b_n חשבונית.

ב. נתון: $c_n=a_n+b_n$

נוכיח כי ההפרש $c_{n+1}-c_n$ קבוע:

$c_{n+1}=a_{n+1}+b_{n+1}$

לכן:

$$c_{n+1}-c_n=(a_{n+1}+b_{n+1})-(a_n+b_n)$$

$$=a_{n+1}+b_{n+1}-a_n-b_n$$

$$=a_{n+1}-a_n+b_{n+1}-b_n$$

$$=4+12=16$$

ההפרש קבוע $d=16$ ולכן סדרת c_n חשבונית.

ג. נתון $a_1=\frac{1}{2}$.

(1) $b_1=a_1+8\cdot 1=\frac{1}{2}+8=8\frac{1}{2}$

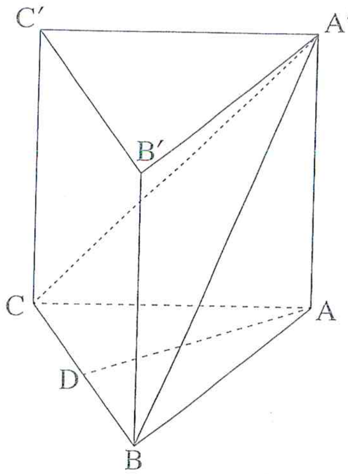
$c_1=a_1+b_1=\frac{1}{2}+8\frac{1}{2}=\boxed{9}$

(2) $S_{20}=\frac{20}{2}[2c_1+(20-1)\cdot d]$

$=10[2\cdot 9+19\cdot 16]$

$=\boxed{3,220}$

טריגונומטריה במרחב



2. $ABCA'B'C'$ היא מנסרה משולשת וישרה

שבסיסה הוא משולש שווה שוקיים $(AC = AB)$.

הנקודה D היא אמצע הקטע CB (ראה ציור).

נתון: $AD = 12$, $\sphericalangle CAB = 40^\circ$.

א. חשב את אורך הצלע CB .

ב. הסבר מדוע המשולש $CA'B$ הוא משולש שווה שוקיים.

נתון כי שטח המשולש $CA'B$ הוא 80 .

ג. חשב את גודל הזווית שבין הקטע DA' ובין בסיס המנסרה , ABC .

ד. חשב את נפח המנסרה $ABCA'B'C'$.

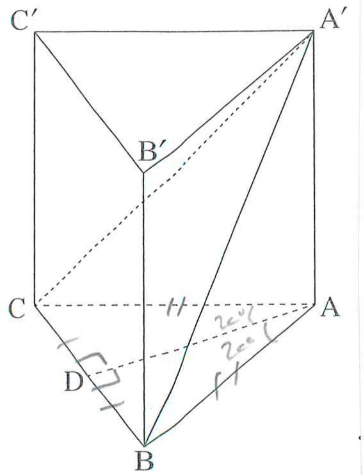
נסמן את הנתונים על השרטוט של המנסרה.

AD תיכון לבסיס במשולש שווה שוקיים, ולכן

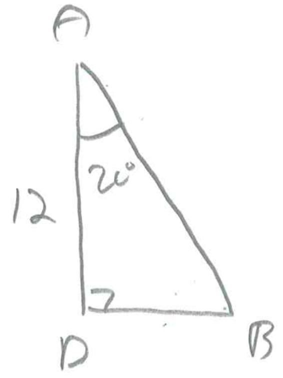
הוא גם גובה וגם חוצה זווית:

$\sphericalangle ADB = \sphericalangle ADC = 90^\circ$

$\sphericalangle BAD = \sphericalangle CAD = 20^\circ$



א. נחשב את BD במשולש ABD:



$\tan 20^\circ = \frac{BD}{12} \Rightarrow BD = 4.3676$

לכן: $CB = 2 \cdot BD = \boxed{8.735}$

ב. מתקיים:

$AB = AC$ (נתון)

$AA' = AA'$ (כל אורך שווה לעצמו)

$\angle BAA' = \angle CAA' = 90^\circ$ (נתון מנסרה משולשת ישרה)

$\Downarrow$

$\triangle BAA' \cong \triangle CAA'$ (משפט חפיפה 3.5.3)

$\Downarrow$

$A'C = A'B$ (צמב"ח)

$\Downarrow$

משולש $CA'B$ שווה שוקיים

ג. הזווית היא זווית ADA'.

נתון: $S_{CA'B} = 80$

$\Downarrow$

נעביר תיכון לבסיס BC במשולש $CA'B$

ולכן הוא גם גובה. מכיון:

$$\frac{BC \cdot A'D}{2} = 80$$

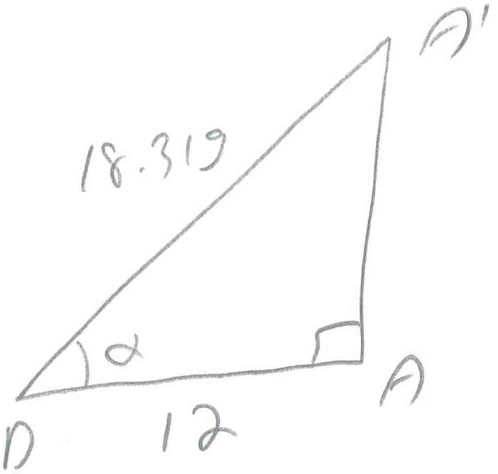
$$\Downarrow$$

$$\frac{8.735 \cdot A'D}{2} = 80$$

$$\Downarrow$$

$$A'D = 18.32$$

כעת במשולש $AA'D$:



$$\cos \measuredangle ADA' = \frac{12}{18.32}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\measuredangle ADA' = 49.078°}$$

ג.

$$V_{ABCA'B'C'} = S_{ABC} \cdot AA'$$

$$S_{ABC} = \frac{BC \cdot AD}{2} = \frac{8.735 \cdot 12}{2} = 52.41$$

נחשב את הגובה AA' במשולש AחA':
בעזרת משפט פיתגורס:

$$AA'^2 + A\text{ח}^2 = A'\text{ח}^2$$
$$\Downarrow$$
$$AA'^2 + 12^2 = 18.32^2$$
$$\Downarrow$$
$$AA' = 13.84$$

מכאן:

$$V_{ABCA'B'C'} = 52.41 \cdot 13.84 = \boxed{725.3544}$$

3. הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $0 \le x \le \pi$.

נתון: $f'(x) = -3\sin 2x$, $f(0) = 0.75$.

פונקציית הנגזרת, $f'(x)$, מוגדרת גם היא בתחום $0 \le x \le \pi$.

א. מצא ביטוי אלגברי לפונקציה $f(x)$.

ב. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה־ x .

ג. מצא את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ בתחום הנתון, וקבע את סוגן.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי ציר ה־ x בתחום שבין נקודות החיתוך שמצאת בסעיף ב.

א. מציאת ביטוי אלגברי לפונקציה $f(x)$ ע"י אינטגרל ל- $f'(x)$:

$$\int(-3\sin 2x)\,dx = \frac{3\cos 2x}{2} + C$$

נתון כי: $f(0)=0.75$, לכן -

$$\frac{3\cos(2\cdot 0)}{2} + C = 0.75$$

$$1.5 + C = 0.75$$

$$C = -0.75$$

$$\boxed{\text{סופית: } f(x) = \frac{3\cos 2x}{2} - 0.75}$$

ב. מציאת שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר x: $F(x)=0$

לכן:

$$\frac{3\cos 2x}{2} - 0.75 = 0$$

$$1.5\cos 2x = 0.75$$

$$\cos 2x = 0.5$$

$$\cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$2x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \;/:2 \qquad 2x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \;/:2$$

$x = -\frac{\pi}{6} + \pi k$

k	x
$\cancel{0}$	
1	$\frac{5\pi}{6}$ ✓
$\cancel{-1}$	
$\cancel{2}$	

$$\downarrow$$

$$\boxed{\left(\frac{5\pi}{6}, 0\right)}$$

$x = \frac{\pi}{6} + \pi k$

k	x
0	$\frac{\pi}{6}$ ✓
$\cancel{1}$	
$\cancel{-1}$	

$$\downarrow$$

$$\boxed{\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)}$$

ג. מציאת שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה ע"י השוואת הנגזרת ל-0:

$$f'(x) = -3\sin 2x$$

$$-3\sin 2x = 0 \quad / : (-3)$$

$$\sin 2x = 0$$

$$\sin 2x = \sin(0)$$

$$2x = \pi k$$

$$x = \frac{\pi}{2} k$$

k	x	
0	0 ✓	$\longrightarrow f(0) = 0.75$
1	$\frac{\pi}{2}$ ✓	$\longrightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{2}\cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) - 0.75 = -2.25$
2	π ✓	$\longrightarrow f(\pi) = \frac{3}{2}\cos(2\pi) - 0.75 = 0.75$
$\cancel{-1}$		

מציאת סוג הקיצון בעזרת טבלת עליה - ירידה:

x	0	$\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{\pi}{2}$	$\left(\frac{3\pi}{4}\right)$	π
y'	0	−	0	+	0
y	0.75	↘	$-2\frac{1}{4}$	↗	0.75

הצבת ערכי ביניים בנגזרת:

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -3\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{6}\right) = \ominus$$

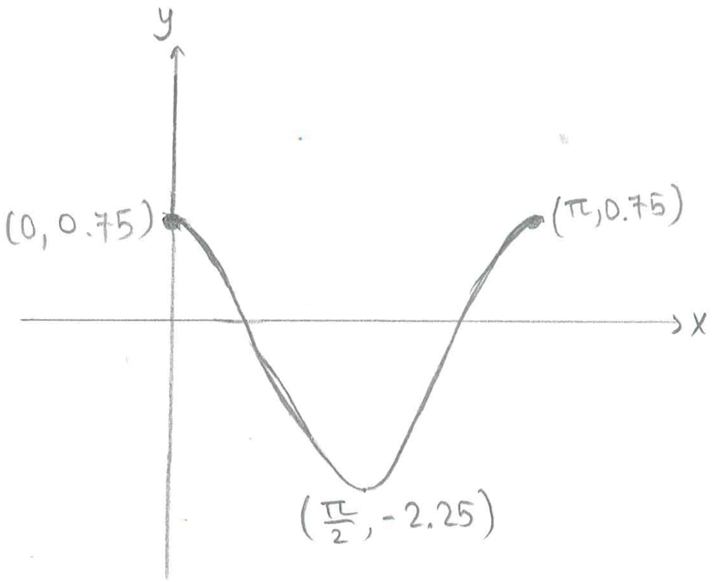
$$f'\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -3\sin\left(2\cdot\frac{3\pi}{4}\right) = \oplus$$

לסיכום:

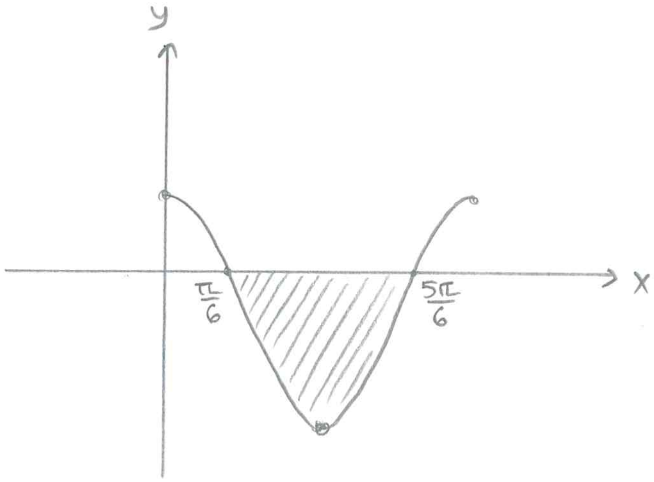
$(0, 0.75)$ מקסימום קצה
$\left(\frac{\pi}{2}, -2.25\right)$ מינימום
$(\pi, 0.75)$ מקסימום קצה.

אין צורך לבדוק בנפרד נקודות קיצון בקצה מכיוון שמשמאל מצאנו אותן.

ג. סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$:



ה. חישוב השטח המוגבל ע"י גרף הפונקציה וציר ה-x, בתחום שבין נקודות החיתוך עם ציר ה-x:



$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left[0-\left(\frac{3\cos 2x}{2}-0.75\right)\right]dx =$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left(-\frac{3}{2}\cos 2x+0.75\right)dx = -\frac{3}{2}\cdot\frac{\sin 2x}{2}+0.75x\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}$$

$$x=\frac{5\pi}{6}: \quad \frac{-3\sin\left(2\cdot\frac{5\pi}{6}\right)}{4}+0.75\cdot\frac{5\pi}{6}=2.613$$

$$x=\frac{\pi}{6}: \quad \frac{-3\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{6}\right)}{4}+0.75\cdot\frac{\pi}{6}=-0.256$$

$$\boxed{S_{\text{מבוקש}} = 2.613-(-0.256) = 2.869 \text{ יח"ר}}$$

4. נתונה הפונקציה $f(x) = -3e^x(2e^x - 4)$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

ג. מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגה.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. נתונה הפונקציה $g(x) = -\frac{1}{2}f(x)$.

(1) כתוב מה הם שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבע את סוגה.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

א. תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$: $\boxed{\text{כל } x}$

ב. נקודות החיתוך עם ציר x :

$-3e^x(2e^x-4)=0$

$-3e^x=0$ אין פתרון

$2e^x-4=0$

$e^x=2$

$x=\ln 2$

$\boxed{(\ln 2,0)}$

נקודת חיתוך עם ציר y :

$f(0)=-3e^0(2e^0-4)=6$

$\boxed{(0,6)}$

ג. שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$: נגזור ונשווה ל- 0

$f'(x)=-3e^x(2e^x-4)+(-3e^x)(2e^x)$

$-3e^x(2e^x-4)-3e^x\cdot 2e^x=0$

$-3e^x(2e^x-4+2e^x)=0$

$-3e^x=0$ אין פתרון

$4e^x=4$

$e^x=1$

$\boxed{x=0} \xrightarrow{\text{מציבים ב-}f} \boxed{(0,6)}$

מציאת סוג הקיצון על פי טבלת עליה - ירידה:

נציב ערכי ביניים בנגזרת:

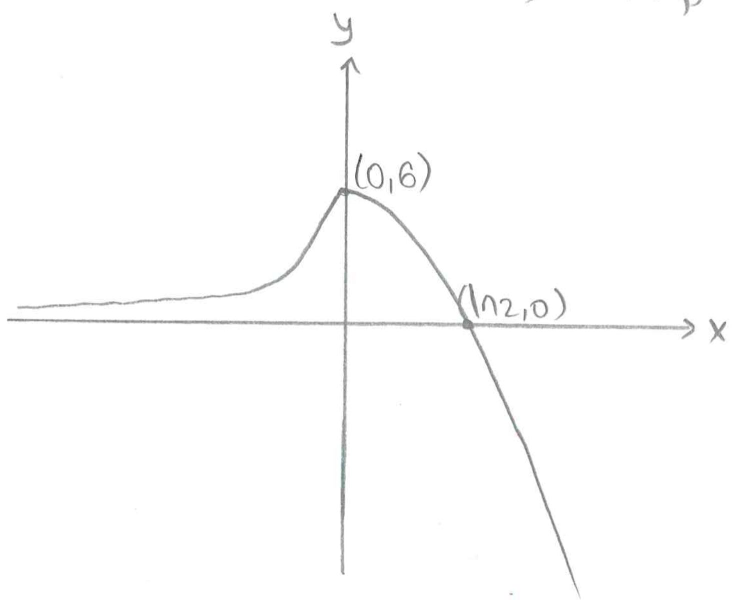
$f'(-1) = -3e^{-1}\cdot(4\cdot e^{-1}-4) = +$

$f'(1) = -3e^{1}(4e^{1}-4) = -$

x	(-1)	0	(1)
y'	+	0	−
y	↗	6	↘

סוג נקודת הקיצון (0,6) הוא מקסימום.

ב. שרטוט גרף הפונקציה $f(x)$:



ה. $g(x) = -\frac{1}{2}f(x)$ ולכן, נערוך השינויים הבאים:

- תחומי העליה הופכים לתחומי ירידה, ולהפך.
- נקודת הקיצון מסוג מקסימום נהפכת לנקודת מינימום.
- כל שיעורי ה-y בפונקציה $f(x)$ מוכפלים ב: $-\frac{1}{2}$.

(1) שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$: $(0,-3)$ מסוג מינימום

5. נתונה הפונקציה $f(x) = \ln(-x^2 + ax)$, שתחום ההגדרה שלה הוא $0 < x < a$. $a > 0$ הוא פרמטר:

ידוע כי לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון.

א. הראה כי שיעור ה־ x של נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ הוא $\frac{a}{2}$.

נתון כי שיעור ה־ y של נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ הוא $\ln\left(2\frac{1}{4}\right)$.

ב. מצא את a .

הצב $a = 3$ במשוואת הפונקציה $f(x)$ ובתחום ההגדרה שלה, וענה על הסעיפים ג-ד.

ג. קבע את הסוג של נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$.

ד. (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה־ x .
בתשובתך השאר 2 ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לציר ה־ x .

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

א. נתון כי לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון. לכן, נגזור ונשווה את הנגזרת ל-0.
במטרה "נמצא" שיעור x יחיד שבו הנגזרת מתאפסת, זו תהיה נק' הקיצון. אז כך:

$$f'(x) = \frac{-2x + a}{-x^2 + ax}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2x + a}{-x^2 + ax} = 0$$

$$-2x + a = 0$$

$$\boxed{x = \frac{a}{2}}$$

לכן, שיעור ה-x של נק' הקיצון של הפונקציה הוא $\frac{a}{2}$.

ב. נתון כי שיעור ה-y של נק' הקיצון הוא: $\ln(2\frac{1}{4})$. לכן: $f(\frac{a}{2}) = \ln(2\frac{1}{4})$

$$\ln\left[-\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a\cdot\frac{a}{2}\right] = \ln\left(2\frac{1}{4}\right)$$

$$\ln(0.25a^2) = \ln(2.25)$$

$$0.25a^2 = 2.25$$

$$a^2 = 9$$

$\boxed{a_1 = 3}$, $\cancel{a_2 = -3}$

נפסל כי נתון
a>0

ה. בסעיף א' הראינו כי כאשר $x = \frac{a}{2}$ לפונקציה נקודת קיצון. בסעיף ב' מצאנו כי $a=3$, לכן, שיעור ה-x של נק' הקיצון הוא $x = \frac{3}{2} = 1.5$. נמצא את סוג הקיצון לפי טבלת עליה - ירידה:

x	0	(1.2)	1.5	(2)	3
y'	////	+	0	−	////
y	////	↗		↘	////

הצבת ערכי ביניים בנגזרת:

$$f'(1.2) = \frac{-2\cdot 1.2+3}{-(1.2)^2+3\cdot 1.2} = (+)\frac{5}{18}$$

$$f'(2) = \frac{-2\cdot 2+3}{-(2)^2+3\cdot 2} = (-)\frac{1}{2}$$

$\boxed{\text{נק' הקיצון } (1.5, \ln(2.25)) \text{ הנה נקודת מקסימום.}}$

ב. (1) מציאת נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר x ; $f(x)=0$

$$\ln(-x^2+3x)=0$$

$$\log_e(-x^2+3x)=0$$

$$e^0 = -x^2+3x$$

$$1 = -x^2+3x$$

$$-x^2+3x-1=0$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2-4\cdot(-1)\cdot(-1)}}{-2} \quad \begin{cases} x_1 = 2.62 \\ x_2 = 0.38 \end{cases}$$

$\boxed{\text{הנקודות הן: } (2.62,0)\ ,\ (0.38,0)}$

(2) עבור פונקציה מסוג זה האסימפטוטות האנכיות מתקבלות בקצה תחום ההגדרה. לכן:

$$-x^2+3x>0$$

$$-x^2+3x=0$$

$$x(-x+3)=0$$

$$x=0 \qquad x=3$$

$\boxed{\text{לכן, האסימפטוטות האנכיות הן: } x=0\ ,\ x=3}$

(3) סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$: